Lineare Algebra

Kuhlmann

27. Vorlesung

10.02.2012.

<u>Erinnerung</u> (1) $[\alpha]_W = \alpha + W$ ist die Nebenklasse von α modulo W. Ein $\beta \in [\alpha]_W$ heißt "Repräsentant" der Äquivalenzklasse.

(2) $V/W :=$ Menge der Nebenklassen

versehen mit einer Verknüpfung $+$:

$$(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\alpha_1 + \alpha_2) + W$$

und einer Verknüpfung "Skalarmultiplikation":

$$c \cdot (\alpha + W) := (c\alpha) + W \quad \text{für } c \in K.$$

<u>Lemma</u>: Diese Verknüpfungen sind wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten

i.e.

a) $\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv \alpha' \bmod W \\ \text{und} \\ \beta \equiv \beta' \bmod W \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \bmod W$

b) $\left.\begin{array}{c}\alpha \equiv \alpha' \bmod W \\ \text{und} \\ c \in K\end{array}\right\} \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \bmod W$.

<u>Beweis</u> a) $\left.\begin{array}{l}\alpha - \alpha' \in W \\ \text{und } \beta - \beta' \in W\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\in W} + \underbrace{(\beta - \beta')}_{\in W}}_{\in W}$

$= (\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') \in W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \bmod W$.

b) $\alpha - \alpha' \in W \Rightarrow c(\alpha - \alpha') \in W \Rightarrow$

$c\alpha - c\alpha' \in W \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \bmod W$. $\blacksquare$

<u>Lemma 1</u> V/W mit diesen Verknüpfungen ist ein K Vektorraum.

<u>Beweis</u> ÜA Was ist 0?

$0_{V/W} = 0 + W = W$ ist der Nullvektor in V/W

Was ist addives Inverse?

$(\alpha + W) + ((-\alpha) + W) = 0 + W = W = 0_{V/W}$ $\blacksquare$

<u>Notation</u>: $\overline{\alpha} := \alpha + W$

Also (i) $\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} := \overline{\alpha_1 + \alpha_2}$

(ii) $c\,\overline{\alpha_1} = \overline{c\alpha_1}$

(iii) $\overline{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$.

<u>Satz 1.</u> (die Kanonische Projektion).

$$\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$$

$$\pi_W(\alpha) := \overline{\alpha}$$

ist eine surjektive lineare transformation

mit $\ker(\pi_W) = W$

<u>Beweis</u> $\pi_W(c\alpha_1 + \alpha_2) = (c\alpha_1 + \alpha_2) + W = (c\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$

$= c(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$.

Sei $\overline{\alpha} \in V/W$ dann ist $\overline{\alpha} = \pi_W(\alpha)$.

$\alpha \in \ker(\pi_W) \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0_{V/W} \Leftrightarrow \alpha + W = W$

$\Leftrightarrow \alpha \in W$. ∎

<u>Korollar 1.</u> $\dim W + \dim(V/W) = \dim V$. ∎

Satz 2 (Homomorphiesatz).

Sei V, Z K-VR, $T: V \to Z$ linear.

Es gilt: $V/_{\ker(T)} \cong R_T$

Beweis Definiere $\overline{T}: V/_{\ker(T)} \twoheadrightarrow R_T$

mit $\overline{T}(\alpha + \ker(T)) := \overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$

(i) $\overline{T}$ wohldefiniert?

$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}' \Rightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$?

$\alpha - \alpha' \in \ker(T) \Leftrightarrow T(\alpha - \alpha') = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$ ∎

(ii) linear?

$\overline{T}(\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}) = \overline{T}(\overline{\alpha_1 + \alpha_2}) = T(\alpha_1 + \alpha_2) =$
$T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \overline{T}(\overline{\alpha_1}) + \overline{T}(\overline{\alpha_2})$ ∎

(iii) $T(\alpha) \in R_T$, ist $\overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$ also $\overline{T}$

ist surjektiv. ∎

(iv) $\overline{T}$ injektiv? $\overline{\alpha} \in \ker(\overline{T}) \Leftrightarrow \overline{T}(\overline{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow \alpha \in \ker(T) \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0$. So $\overline{T}$ regulär. ∎

Korollar 2 $\dfrac{W \oplus W'}{W} \simeq W'$ (wobei W, W' Unterräume von V und $V = W \oplus W'$)

Beweis $\cancel{W} = W \oplus W'$ bedeutet $\forall v \in V \ \exists! \ w \in W$ und $w' \in W'$ so daß $v = w + w'$.

Definiere $P_{W'} : V \longrightarrow W'$

$v \longmapsto w'$

$P_{W'}$ linear, surjektiv ✓
ÜA ✓ ÜA

$\alpha \in \ker(P_{W'}) \Leftrightarrow P_{W'}(v) = 0 \Leftrightarrow w' = 0$

$\Leftrightarrow \alpha \in W$.

Satz 2 $\Rightarrow V/_{\ker(P_{W'})} \simeq \operatorname{Bild}(P_{W'})$. ∎

Korollar 3 $\left(V/_W\right)^* \simeq W^0$ (wobei $W \leq V$ unterr.)

Beweis Sei $\pi_W : V \longrightarrow V/_W$ betrachte

$\pi_W^t : \left(V/_W\right)^* \longrightarrow V^*$ Setze $T := \pi_W$

$$R_{T^t} = (\ker(T))^0 = W^0$$

$$\ker(T^t) = (R_T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$$

Also T^t regulär und surjektiv auf W^0 ∎

$\boxed{\text{Fragestellung}}$: Sei $W \subseteq V$ Unterraum: was ist die Beziehung zwischen W^*, V^*?

__Korollar 4__ $\quad W^* \simeq V^*/W^0 \quad$ wobei $W \subseteq V$ unter.

__Beweis 1.__ $Id: W \longrightarrow V$ Identitätsab.

$Id^t: V^* \longrightarrow W^*$

$$\ker(Id^t) = (R_{Id})^0 = W^0$$

$$R_{Id^t} = (\ker(Id))^0 = (\{0\})^0 = W^*$$ ∎

__Beweis 2__ Betrachte die Abbildung

ü A $\quad \rho: V^* \longrightarrow W^*$

$$\rho(f) := f\restriction_W \quad \text{(die Restringierung)}$$

Ist ρ linear? Was ist $\ker(\rho)$? Was ist R_ρ? Benutze Homomorphie Satz (nach der Berechnung von $\ker(\rho)$ und R_ρ. ∎